ملاحظات :

1- إذا كانت سلسلة التوابع $\sum f_n(x)$ متقاربة بانتظام على المجموعة I فهي متقاربة بانتظام على أي مجموعة $I_1 \subseteq I$.

2- في مبرهنة الإشتقاق حداً حداً لسلاسل التوابع فإن المبرهنة تبقى صحيحة عند الدراسة على أي مجال $I \subseteq R$ [ليس بالضرورة أن يكون مجال مغلق].

3- اختبار ديني للسلاسل التابعية
لتكن $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ سلسلة من التوابع المستمرة والموجبة على المجال المغلق والمحدود $[a,b]$ والمتقاربة من التابع f المستمر على المجال $[a,b]$ عندئذٍ $\sum f_n(x)$ تتقارب بانتظام على $[a,b]$ من التابع f.

مثال: ادرس التقارب المنتظم لسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^n x$ على المجال $[0, \frac{\pi}{4}]$

الحل: السلسلة تمثل سلسلة هندسية أساسها $r = \sin x$ وبما أنه من أجل أي $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ بأن $|r| = |\sin x| < 1$ فإن السلسلة متقاربة على هذا المجال ومجموعه

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 - \sin x}$$

بما أن كل حد من حدود السلسلة هو تابع مستمر وموجب على المجال المغلق والمحدود $[0, \frac{\pi}{4}]$ والسلسلة تتقارب من التابع $f(x)$ المستمر على المجال $[0, \frac{\pi}{4}]$ عندئذٍ حسب اختبار ديني تكون السلسلة متقاربة بانتظام على $[0, \frac{\pi}{4}]$.

* هل السلسلة متقاربة بانتظام على $[0, \frac{\pi}{2}[$ ؟
غير متقاربة بانتظام لأن $\sup_{x \in [0, \frac{\pi}{2}[} = 1 \neq 0$

الموضوع:

سلسلة تايلور وماكلوران:

1 تعريف التابع التحليلي الحقيقي:

ليكن $f(x)$ تابع معرف على المجال المفتوح I، نقول إنه تام تحليلي حقيقي عند النقطة x_0 و I إذا كان التابع f يكتب على شكل سلسلة قوى حول النقطة x_0 أي:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n \; ; \; x\in]x_0-S, x_0+S[$$

. نقول إن f تابع تحليلي حقيقي على I إذا كان f تحليلي حقيقي عند كل نقطة $x_0\in I$

مبرهنة: إذا كان f تابع تحليلي حقيقي عند x_0 فإنه قابل للاشتقاق عدد غير منتهٍ من المرات في جوار x_0 ويكون:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

وتسمى السلسلة سلسلة تايلور حول النقطة x_0.
وتسمى السلسلة سلسلة ماكلوران من أجل $x_0=0$

مثال:

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & ; x\neq 0 \\ 0 & ; x=0 \end{cases}$$

$f\in C^{\infty}(\mathbb{R})$

$f^{(n)}(0)=0 \; ; \forall n\in \mathbb{N}$

$$f(x)=\sum \frac{0}{n!}(x-0)^n=0$$

• ليس بالضرورة أن يكون كل تابع قابل للاشتقاق عدد غير منتهٍ من المرات يكون تحليلي

ملاحظة:

1- إذا كان f تحليلي حقيقي على المجال I فإنه يملك عدد منتهٍ من الأصفار على أي مجال محتوى تماماً ضمن هذا المجال.

الموضوع:

2- إذا كان f قابل للاشتقاق عدد غير منتهٍ من المرات فليس بالضرورة أن يكون تحليلي حقيقي والسبب المثال:

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

f تابع قابل للاشتقاق عدد غير منتهٍ من المرات على IR . ولكنه غير تحليلي عند النقطة $x_0=0$ والسبب إذا فرضنا جدلاً أنه تحليلي يجب أن يكتب بالشكل:

$$f(x)=\sum_{x=x_0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}x^n$$

ولكن $f^{(n)}(0)=0$ مهما تكن $n\in IN$ وبالتالي:

$f(x)=\sum 0=0$ في جوار $x_0=0$ وهذا مستحيل.

مبرهنة: ليكن f تابع قابل للاشتقاق $(n+1)$ مرة على المجال المفتوح I وليكن $x\in I$ عندئذٍ:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^k+R_n(x)$$

حيث:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}$$

حيث c نقطة بين x_0 و x.

مبرهنة: لنفرض أن f قابل للاشتقاق عدد غير منتهٍ من المرات على المجال المفتوح I ، لتكن $x_0\in I$ وليكن:

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$$ (في جوار لـ x_0)

عندئذٍ فإن:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

مثال: أوجد منشور ماكلوران للتابع $f(x)=\sin x$ ؟

الحل: التابع f معرف على IR وقابل للاشتقاق عدد غير منتهٍ من المرات:

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin(x + \pi)$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x$$

$$\vdots$$

$$f^{n}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \Rightarrow f^{n}(0) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) =$$

$$= \begin{cases} 0 \,; & n \text{ زوجي} \\ \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) ; & n \text{ فردي} \end{cases}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$$

حيث c بين 0 و x.

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \right| \leq 1 \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

(لأنها دائماً sin أو cos)

لنأخذ السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ لندرس تقاربها:

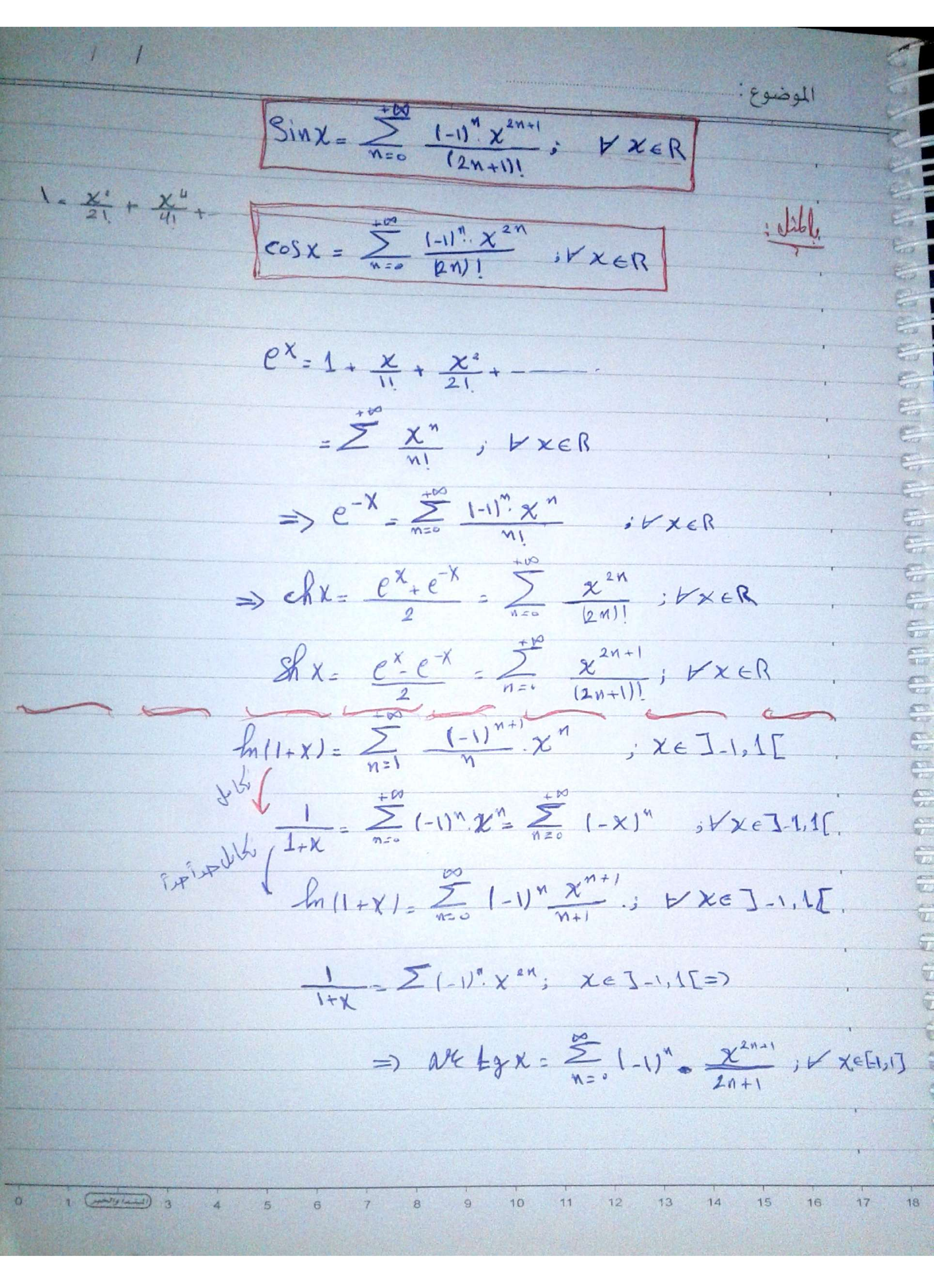
$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}}{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{|x|}{n+2} = 0 < 1, \quad \forall x \in R$$

$$\Rightarrow R_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \; ; \forall x \in R$$

وبالتالي:

$$f(x) = \sin x = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots \ldots \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$



/ /

الموضوع :

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} \; ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

بالمثل :

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} \; ; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$$= \sum^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \; ; \; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^n}{n!} \; ; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \; ; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \; ; \; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot x^n \; ; \; x \in \left]-1,1\right[$$

تكامل

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n \; ; \forall x \in \left]-1,1\right[$$

تكامل حد بحد

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \; ; \; \forall x \in \left]-1,1\right[$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum (-1)^n \cdot x^{2n} \; ; \quad x \in \left]-1,1\right[\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \; ; \forall x \in [-1,1]$$